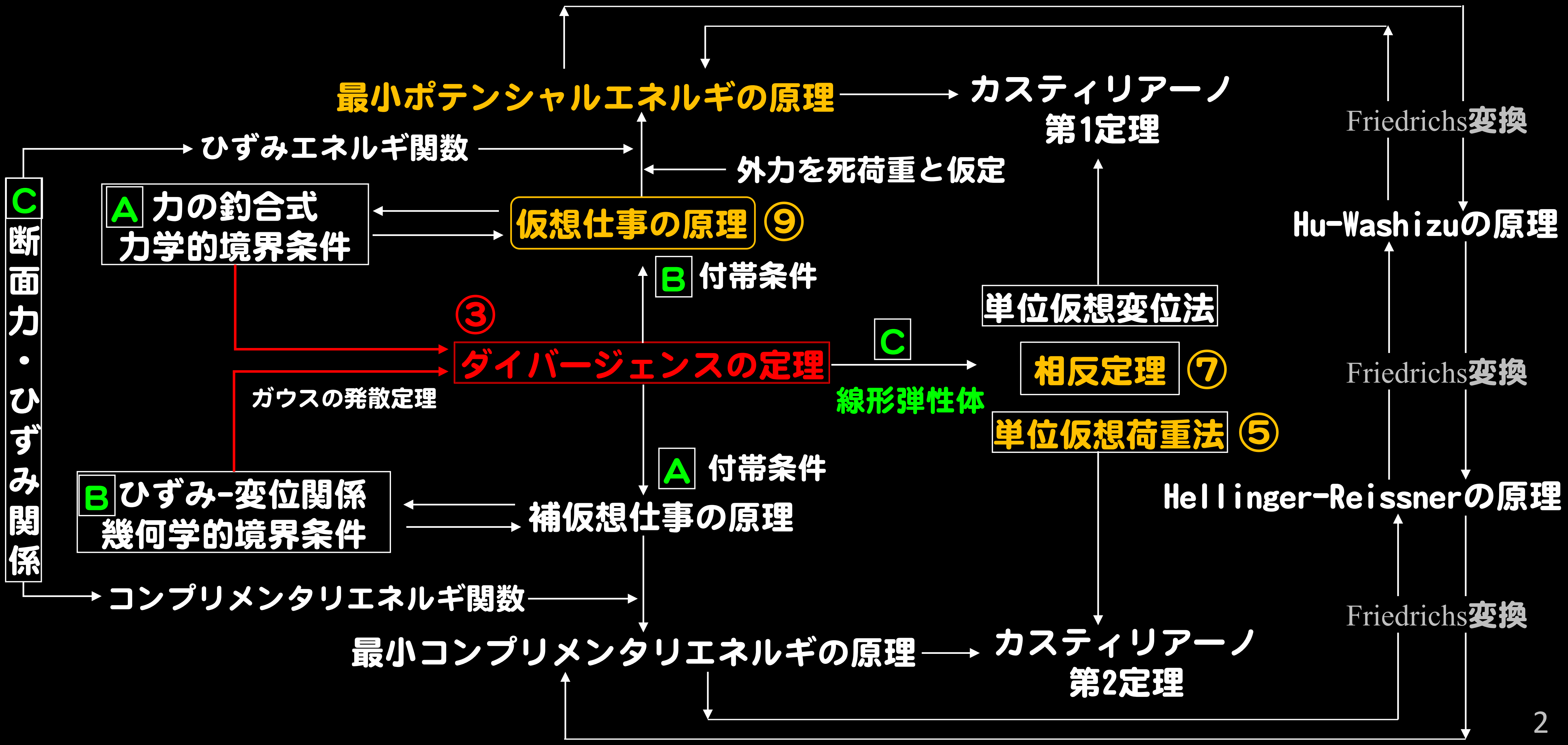
仮想仕事の原理

⑨ 仮想仕事の原理

城戸將江・津田惠吾 2021.06

仕事の原理・エネルギ原理の全体像



概要1

1) ダイバージェンスの定理
2) 適合系
   ひずみ-変位関係，幾何学的境界条件
   を満足する（任意の）仮想変位を与える
   → δ演算子　δv, $\delta\theta$

3) 仮想仕事式より，力の釣合い式・
   力学的境界条件が得られる

概要2 仮想仕事の原理

外力のなす仮想仕事

外力

仮想変位

釣合い式,
力学的境界条件
が得られる

力の釣合い

ひずみー変位関係

付帯条件
ひずみー変位関係
幾何学的境界条件

断面力ーひずみ関係

断面力

ひずみ

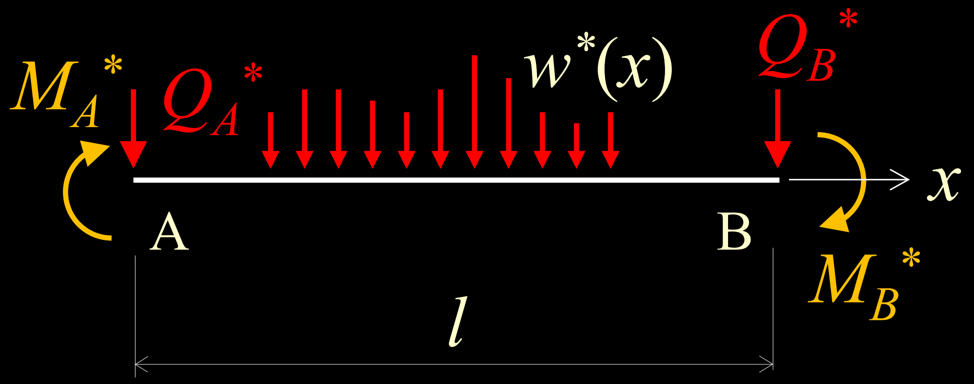
内力のなす仮想仕事

釣合系

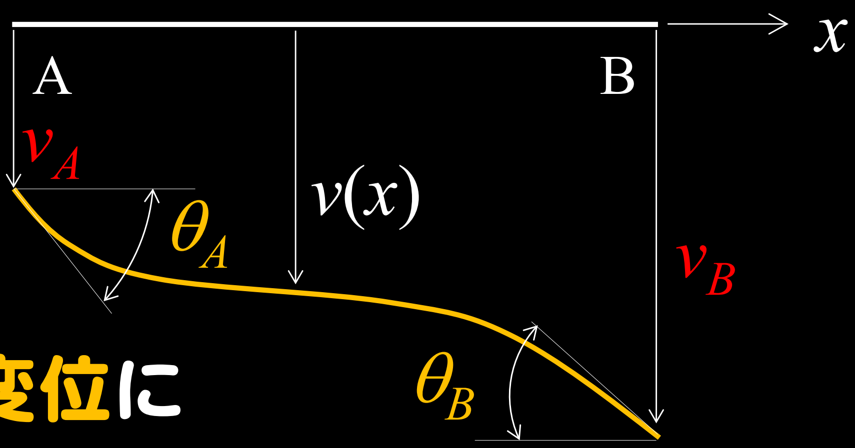
適合系

釣合系の外力と適合系の変位

釣合系の外力



適合系の変位



釣合系の外力が適合系の変位に
対してなす仮想仕事

$$\boxed{Q_A^* \cdot v_A + M_A^* \cdot \theta_A + Q_B^* \cdot v_B + M_B^* \cdot \theta_B + \int_0^l w^*(x)v(x)dx}$$

ダイバージェンスの定理と仮想仕事の原理　1

ダイバージェンスの定理

外力のなす仮想仕事　　内力のなす仮想仕事

$$\boxed{Q_A^* \cdot v_A + M_A^* \cdot \theta_A + Q_B^* \cdot v_B + M_B^* \cdot \theta_B + \int_0^l w^*(x)v(x)dx = \int_0^l M^*(x)\cdot\phi(x)dx}$$

ひずみ－変位関係，
幾何学的境界条件を
付帯条件

変位やたわみ角が規定されたところ，すなわち，幾何学的境界条件の所では，δv や $\delta\theta$ ＝0

仮想仕事の原理

仮想仕事式

$$\boxed{Q_A^* \cdot \delta v_A + M_A^* \cdot \delta\theta_A + Q_B^* \cdot \delta v_B + M_B^* \cdot \delta\theta_B + \int_0^l w^*(x)\delta v(x)dx = \int_0^l M^*(x)\cdot\delta\phi(x)dx}$$

ダイバージェンスの定理と仮想仕事の原理 2

ダイバージェンスの定理

　釣合系の外力が適合系の変位に対してなす外力のなす仮想仕事は，釣合系の内力が適合系のひずみ対してなす内力のなす仕事に等しい．
ダイバージェンスの定理式には，釣合い式・力学的境界条件，ひずみ一変位関係，幾何学的境界条件が内包されている．
　応用としての単位仮想荷重法，相反定理に見られるように，釣合系，適合系，どちらにも外力，変位など具体的なものを与える．

仮想仕事の原理

　対象とする釣合系のもつ幾何学的境界条件を満足する任意の仮想変位とこの仮想変位に対応するひずみを適合系として，考えている釣合系の外力のなす仮想仕事は内力のなす仕事に等しい．
　仮想仕事の原理式より，任意の仮想変位に対して成り立つことより，釣合い式・力学的境界条件があぶりだされる．

仮想仕事式から釣合い式へ　1

仮想仕事式

$$\boxed{Q_A^* \cdot \delta v_A + M_A^* \cdot \delta\theta_A + Q_B^* \cdot \delta v_B + M_B^* \cdot \delta\theta_B + \int_0^l w^*(x)\delta v(x)dx = \int_0^l M^*(x) \cdot \delta\phi(x)dx}$$

ひずみー変位関係を用いると右辺は次のようになる。

2度，部分積分

$$\delta v'(x) = \left(\delta v(x)\right)'$$
$$\delta v''(x) = \left(\delta v'(x)\right)'$$

$$\int_0^l M^*(x) \cdot \delta\phi(x)dx = -\int_0^l M^*(x) \cdot \delta v''(x)dx$$
$$= \left[-M^*(x) \cdot \delta v'(x) + M^{*\prime}(x) \cdot \delta v(x)\right]_0^l - \int_0^l M^{*\prime\prime}(x) \cdot \delta v(x)dx$$
$$= \left\{-M^*(l) \cdot \delta v'(l) + M^{*\prime}(l) \cdot \delta v(l)\right\} - \left\{-M^*(0) \cdot \delta v'(0) + M^{*\prime}(0) \cdot \delta v(0)\right\} - \int_0^l M^{*\prime\prime}(x) \cdot \delta v(x)dx$$

左辺の変位をたわみ関数で表すと

$$\boxed{\delta v_A = \delta v(0),\quad \delta\theta_A = \delta v'(0),\quad \delta v_B = \delta v(l),\quad \delta\theta_B = \delta v'(l)}$$

仮想仕事式から釣合い式へ ２

$$\boxed{Q_A^* \cdot \delta v_A + M_A^* \cdot \delta\theta_A + Q_B^* \cdot \delta v_B + M_B^* \cdot \delta\theta_B + \int_0^l w^*(x)\delta v(x)dx = \int_0^l M^*(x) \cdot \delta\phi(x)dx}$$

上式の仮想仕事式は下式のようになる。

$$Q_A^* \cdot \delta v(0) + M_A^* \cdot \delta v'(0) + Q_B^* \cdot \delta v(l) + M_B^* \cdot \delta v'(l) + \int_0^l w^*(x)\delta v(x)dx$$
$$= \left\{-M^*(l) \cdot \delta v'(l) + M^{*\prime}(l) \cdot \delta v(l)\right\} - \left\{-M^*(0) \cdot \delta v'(0) + M^{*\prime}(0) \cdot \delta v(0)\right\} - \int_0^l M^{*\prime\prime}(x) \cdot \delta v(x)dx$$

整理すると下式のようになる。

$$\int_0^l \left(M^{*\prime\prime}(x) + w^*(x)\right)\delta v(x)dx + \left(Q_A^* + M^{*\prime}(0)\right) \cdot \delta v(0) + \left(M_A^* - M^*(0)\right) \cdot \delta v'(0)$$
$$+ \left(Q_B^* - M^{*\prime}(l) \cdot\right)\delta v(l) + \left(M_B^* + M^*(l)\right) \cdot \delta v'(l) = 0$$

仮想仕事式から釣合い式へ 3

$$\int_0^l \left(M^{*\prime\prime}(x) + w^*(x) \right) \delta v(x) dx + \left(Q_A^* + M^{*\prime}(0) \right) \cdot \delta v(0) + \left(M_A^* - M^*(0) \right) \cdot \delta v'(0)$$
$$+ \left(Q_B^* - M^{*\prime}(l) \cdot \right) \delta v(l) + \left(M_B^* + M^*(l) \right) \cdot \delta v'(l) = 0$$

上式が恒に成り立つために，下式となる必要がある．

$$\boxed{M^{*\prime\prime}(x) + w^*(x) = 0}$$

$$\left(Q_A^* + M^{*\prime}(0) \right) \cdot \delta v(0) = 0$$
$$\left(M_A^* - M^*(0) \right) \cdot \delta v'(0) = 0$$
$$\left(Q_B^* - M^{*\prime}(l) \right) \cdot \delta v(l) = 0$$
$$\left(M_B^* + M^*(l) \right) \cdot \delta v'(l) = 0$$

仮想仕事式から釣合い式へ 4

$\boxed{M^{*\,\prime\prime}(x)+w^{*}(x)=0}$ **釣合い式** **(断面力M^{*}と外力w^{*}の関係)**

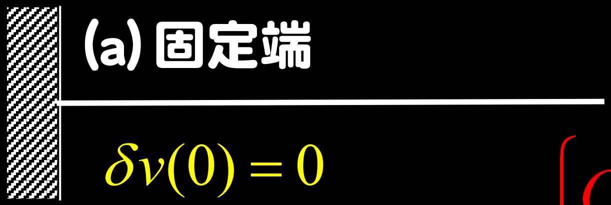
$$\left(Q_A^{*}+M^{*\,\prime}(0)\right)\cdot\delta v(0)=0 \;\rightarrow\; Q_A^{*}+M^{*\,\prime}(0)=0 \;\text{あるいは}\; \delta v(0)=0$$

$$\left(M_A^{*}-M^{*}(0)\right)\cdot\delta v'(0)=0 \;\rightarrow\; M_A^{*}-M^{*}(0)=0 \;\text{あるいは}\; \delta v'(0)=0$$

$$\left(Q_B^{*}-M^{*\,\prime}(l)\right)\cdot\delta v(l)=0 \;\rightarrow\; Q_B^{*}-M^{*\,\prime}(l)=0 \;\text{あるいは}\; \delta v(l)=0$$

$$\left(M_B^{*}+M^{*}(l)\right)\cdot\delta v'(l)=0 \;\rightarrow\; M_B^{*}+M^{*}(l)=0 \;\text{あるいは}\; \delta v'(l)=0$$

(a) 固定端



$\delta v(0)=0$

$\delta v'(0)=0$

$$\begin{cases} Q_B^{*}-M^{*\,\prime}(l)=0 \\ M_B^{*}+M^{*}(l)=0 \end{cases}$$

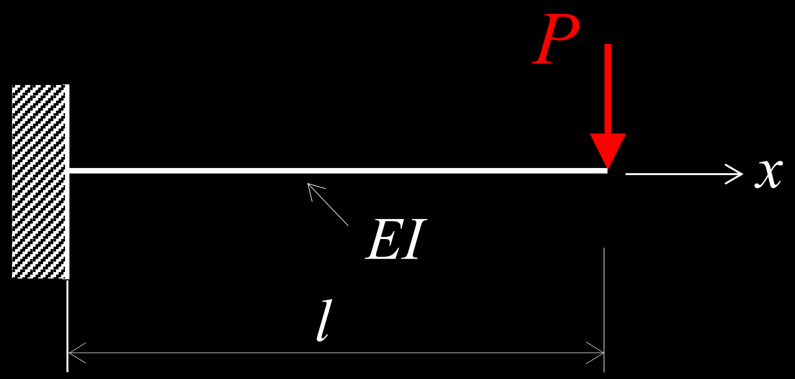
(b) ピン支点

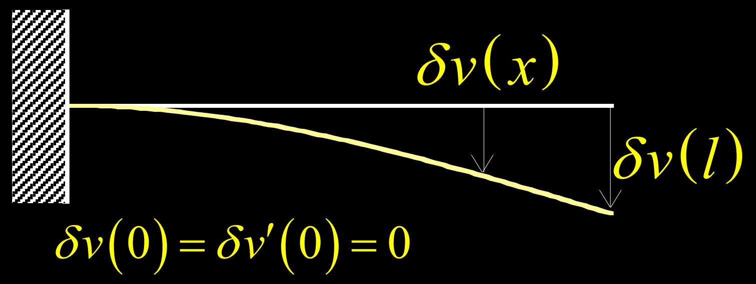
$\delta v(0)=0$ $\quad$ $\delta v(l)=0$

$M_A^{*}-M^{*}(0)=0$ $\quad$ $M_B^{*}+M^{*}(l)=0$

仮想仕事式は，釣合い式と，力学的境界条件と等価である．

具体例





仮想変位は幾何学的境界条件

$$\delta v(0)=\delta v'(0)=0$$

ひずみ―変位関係

$$\delta\phi(x)=-\left(\delta v(x)\right)''$$

を拘束条件とする

仮想仕事式は下式となる。

$$P\cdot\delta v(l)=\int_0^l M\cdot\delta\phi dx=\int_0^l M\cdot\left(-\delta v''\right)dx$$

右辺を2度**部分積分**すると下式となる。

$$P\cdot\delta v(l)=\Big[-M(x)\cdot\delta v'(x)+M'(x)\cdot\delta v(x)\Big]_0^l$$

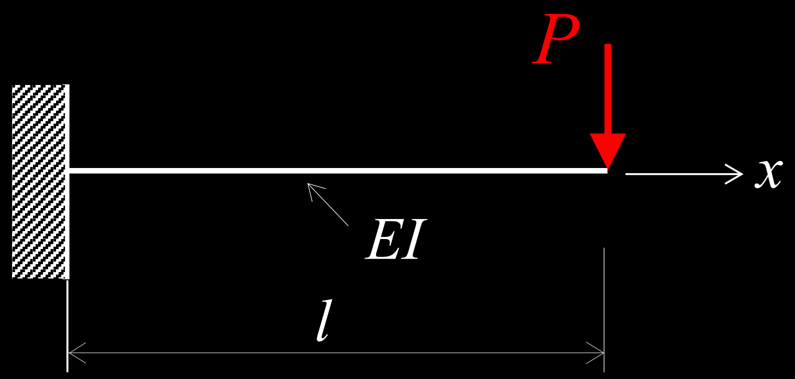
$$-\int_0^l M''(x)\cdot\delta v(x)dx$$

$\delta v(0)=\delta v'(0)=0$ を用いると下式となる。

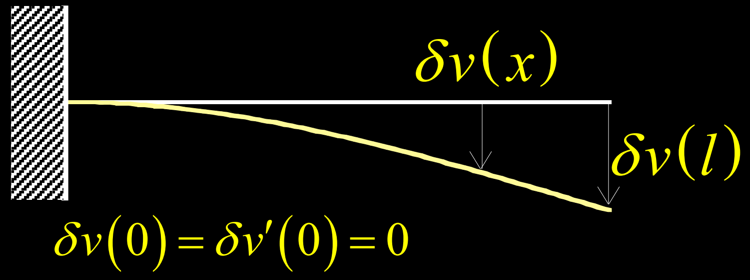
$$P\cdot\delta v(l)=-M(l)\cdot\delta v'(l)+M'(l)\cdot\delta v(l)$$

$$-\int_0^l M''(x)\cdot\delta v(x)dx$$

具体例(続)



$$P \cdot \delta v(l) = -M(l) \cdot \delta v'(l) + M'(l) \cdot \delta v(l) - \int_0^l M''(x) \cdot \delta v(x) dx$$



整理すると下式が得られる。

$$\int_0^l M''(x) \cdot \delta v(x) dx + \left(P - M'(l)\right) \cdot \delta v(l) + M(l) \cdot \delta v'(l) = 0$$

ひずみ－変位関係と幾何学的境界条件を満足する**任意の仮想変位**に対して上式が恒等的に成立つためには，下式となる必要がある。

$$M''(x) = 0 \qquad P - M'(l) = 0 \qquad M(l) = 0$$

釣合微分方程式と$x = l$における力学的境界条件が得られた。

ポイント1

1） 部分積分の公式

$$\left.\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g'(x)dx &= \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \\
\int_a^b f(x)h''(x)dx &= \left[f(x)h'(x) - f'(x)h(x)\right]_a^b + \int_a^b f''(x)h(x)dx
\end{aligned}\right\}$$

2） 微分演算子と変分演算子が交換可能であること

$$\delta v''(x) = \left(\delta v'(x)\right)' = \left(\delta v(x)\right)'' ,\ \delta v'(x) = \left(\delta v(x)\right)'$$ など

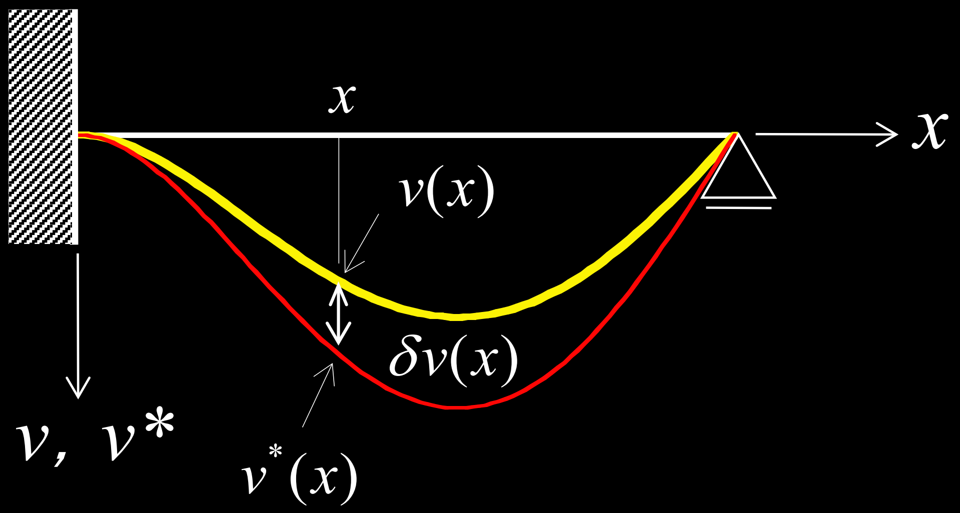
ポイント2

1) 変分演算子δ

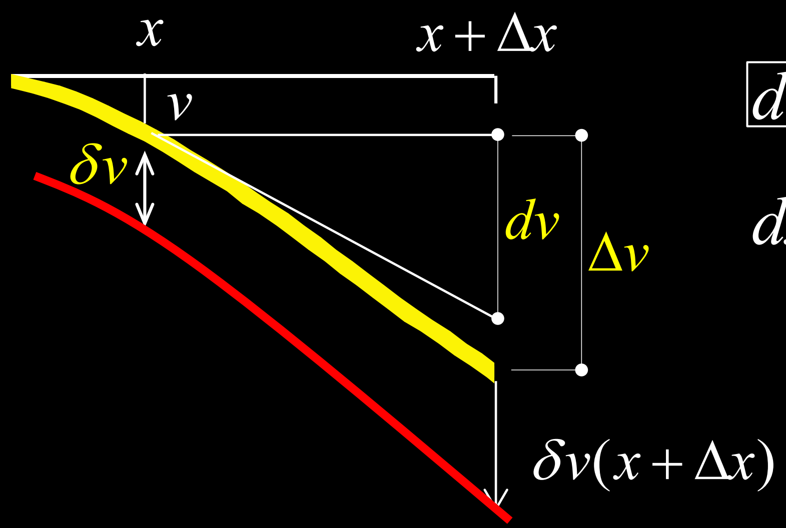
$$\delta v(x) = \delta\left[v\left(x\right)\right] = v^*\left(x\right) - v\left(x\right)$$

2) 変分δvと微分dvと増分Δv

$$\Delta v \equiv v\left(x+\Delta x\right) - v\left(x\right)$$



変分δv



$$\boxed{dv \equiv v'\Delta x}$$

$$dx = x'\Delta x = \Delta x$$

変分δvと微分dvと増分Δv

まとめ

1) ダイバージェンスの定理において，ひずみ－変位関係，幾何学的境界条件を付帯条件とすると，仮想仕事の原理となる．

2) 仮想仕事の原理より，釣合い式・力学的境界条件が得られる．

注意

仮想仕事の原理はエネルギ保存則とは無関係であることに注意されたい．
　釣合系の外力・断面力と全く無関係の仮想変位を考えて良いこと，断面力ーひずみ関係は関係しないことによりエネルギとは関係しない．

Hu-Washizuの原理の鷲津久一郎先生は，その著書（弾性学の変分原理概論）で，仮想仕事の原理について，「“幾何学的境界条件を乱さないような任意の仮想変位に際し，応力のなす仮想仕事の総和は，体積力および表面力のなす仮想仕事の総和に等しい”と言い表わすのが適当のようである」．また，仮想仕事の原理式に関して，「基礎になっているのは divergence の定理であって，別にエネルギの法則を用いているのではないことに留意されたい」と書かれている．

次の解説について

仮想仕事の原理を用いた例題を

⑩ 仮想仕事の原理 例題

で解説します.

質問・要望・意見

よりわかりやすく，役に立つ内容にしたいと考えています．

質問，要望，意見などを，どうぞ宜しくお願い致します．

質問等の送付先は，ホームページに示しています．

2021年6月版

仮想仕事の原理とエネルギ原理 トラス, 梁, 骨組

鹿島出版会 2019年9月